6.5 Variačné úlohy s voľnými koncovými bodmi v R3

Nech jeden z koncových bodov napríklad bod $B=(t_1,x_1,y_1)$ je voľný a bod $A=(t_0,x_0,y_0)$ je pevný (alebo aj tento bod je voľný). Majme funkcionál

$$v[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1} F[t,x(t),y(t),x'(t),y'(t)]dt\,. \tag{6.5.1}$$

Je zrejmé, že extrém daného funkcionálu v môže nastať len na integrálnych krivkách x,y systému Eulerových rovníc

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0,\quad F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0\ . \tag{6.5.2}$$

Analogicky ako pre funkcionál (4.1) jednej premennej, dostávame

$$\delta v=\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}\right)|_{t=t_1}\ \delta t_1+F_{x'}\,|_{t=t_1}\ \delta x_1+F_{y'}\,|_{t=t_1}\ \delta y_1=0$$

1. Nech variácie $\delta t_1,\delta x_1,\delta y_1$ sú nezávislé, potom x,y splňujú podmienku (6.5.2), podmienky $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ a podmienky

$$\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}\right)|_{t=t_1}=0,\quad F_{x'}\,|_{t=t_1}=0,\quad F_{y'}\,|_{t=t_1}=0\,.$$

2. Ak sa koncový bod $B=(t_1,x_1,y_1)$ pohybuje po nejakej krivke $x_1=\varphi(t_1),y_1=\psi(t_1)$, potom $\delta x_1=\varphi'(t_1)\delta t_1$, $\delta y_1=\psi'(t_1)\delta t_1$. Ak na krivkách x,y funkcionál (6.5.1) nadobúda extrém, potom x,y splňujú podmienku (6.5.2), podmienky $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ a podmienku

$$\left[F+(\varphi'-x')F_{x'}+(\psi'-y')F_{y'}\right]_{t=t_1}=0\,, \tag{6.5.3}$$

Podmienka (6.5.3) sa nazýva podmienkou transverzality.

3. Nech y_1 je funkciou t_1,x_1, kde koncový bod B sa pohybuje po nejakej ploche $y_1=\varphi(t_1,x_1)$, potom $\delta y_1=\varphi'_{t_1}\delta t_1+\varphi'_{x_1}\delta x_1$, pričom variácie δt_1 a δx_1 sú ľubovoľné. Ak na krivkách x,y funkcionál (6.5.1) nadobúda extrém, potom x,y splňujú podmienku (6.5.2), podmienky $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ a podmienky

$$\left[F-x'F_{x'}+(\varphi'_{t_1}-y')F_{y'}\right]_{t=t_1}=0\,,\qquad \left[F_{x'}+F_{y'}\varphi'_{x_1}\right]_{t=t_1}=0\,.$$

Ak bod A je pevný tieto dve podmienky a rovnica $y_1=\varphi(t_1,x_1)$, nám obyčajne dávajú možnosť určiť konštanty vo všeobecnom riešení systému Eulerových rovníc. Pre voľný koncový bod A dostaneme podobné podmienky.